

DS N°2

Bonus

1. Soit $\|\cdot\|_2$ la semi norme de la convergence en moyenne quadratique dans $\mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifie $\|f\|_2 = 0$ si, et seulement si, elle est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment.
2. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer, sans utiliser de résultats de densité, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} = 0.$$

Généralités [5pts]

1. (0.5pt) Donner la définition de fonction analytique.
2. (0.5pt) Quel est le lien entre séries entières et fonctions analytiques ?
3. (1.5pt) Montrer que les fonctions $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, et $z \mapsto \Im(z)$ ne sont pas $\mathbb{C}$ dérivables en aucun point de $\mathbb{C}$.
4. (1.5pt) Soient Ω un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, et $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Montrer que si f est nulle au voisinage de z_0 alors f est nulle sur tout Ω .
5. (1pt) Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe par arcs Ω et $z \in \Omega$. Montrer que si $f(z_n) = 0$ où z_n est une suite de points de $\Omega \setminus \{z\}$ convergeant vers $z \in \Omega$ alors $f = 0$ sur Ω .

Exercice 1 [10pts]

Soit $a \in]0, +\infty[$.

1. (1pt) Développer en série de Fourier la fonction f_a paire et 2π -périodique définie pour $x \in [0, \pi]$ par :

$$f_a(x) = a^2(x - \pi)^2.$$

2. (1pt) On définit la fonction h_a par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = 4a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}.$$

Montrer que h_a est continue, paire et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

- (a) (0.5pt) Ecrire $f_a(x) - h_a(x)$ sous la forme de la somme d'une série trigonométrique.
- (b) (1pt) Montrer que $f_a - h_a$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
- (c) (0.5pt) Exprimer la dérivée seconde $(f_a - h_a)''$ en fonction de h_a .
- (d) (0.5pt) Montrer que h_a est de classe C^2 sur $]0, \pi[$ et solution de l'équation différentielle :

$$y'' - a^2 y = 2a^2.$$

- (e) (0.5pt) En déduire qu'il existe trois constantes réelles A , B et C telles que, pour $x \in [0, \pi]$:

$$h_a(x) = A \operatorname{ch}(ax) + B \operatorname{sh}(ax) + C.$$

- (f) (1pt) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$, $h'_a(x) = f'_a(x) + 4a^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n^2 + a^2)}$, et déduire que h'_a a une limite réelle en 0^+ et en π^- .

- (g) (1pt) Déduire que h_a possède une dérivée à droite en $x = 0$ et une dérivée à gauche en $x = \pi$ et que $h'_a(0^+) = -2a^2\pi$ et $h'_a(\pi^-) = 0$.
- (h) (1pt) Déterminer A, B et C et déduire que :

$$\forall x \in [0, \pi], h_a(x) = -2 + \frac{2a\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{\operatorname{sh}(a\pi)} \operatorname{ch}(ax) - 2a\pi \operatorname{sh}(ax).$$

4. (1pt) Calculer les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.
5. (1pt) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$.

Exercice 2 : Théorème de Bernstein sur les séries entières [5pts]

Rappel de la formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors, la formule de Taylor avec reste intégral est donnée par :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$, à valeurs réelles, et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in] -a, a[, f^{(2n)}(x) \geq 0$$

On considère les fonctions

$$g : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Soit $b \in]0, a[$.

- (1pt) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in] -a, a[$, on a $g^{(2k+1)}(x) = 0$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(2k)}(0) \geq 0$.
- (1pt) Soient $n \geq 0$ et $x \in [0, b]$, et notons $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(t) dt$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :

$$R_n(x) \leq g(x).$$

- (2pt) Montrer que pour tout $x \in [0, b]$, on a :

$$R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b).$$

et déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

- (1pt) Montrer que $\forall x \in [0, b]$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} g^{(2n)}(0)$, et déduire que :

$$\forall x \in] -b, b[, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

- (1pt) Montrer que pour tout $x \in] -b, b[$, on a : $|h^{(2n)}(x)| \leq g^{(2n)}(x)$.
- (2pt) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in] -b, b[$:

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^n \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}.$$

- (2pt) Conclure.

Exercice 3 : Formule du binôme généralisée [5pts]

Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors $(1+x)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n$. C'est la formule du binôme de Newton. L'objectif de cet exercice est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel. Pour cela, on considère un nombre réel α , qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

1. (1pt) Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $] -1, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \quad (\star)$$

2. On se propose de chercher les solutions de l'équation différentielle $(\star)$ qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme est notée $\psi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution $(\star)$ sur l'intervalle $] -r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.
 - (a) (1pt) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = (n-\alpha)a_n$.
 - (b) (1pt) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.
 - (c) (1pt) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de $(\star)$ sur l'intervalle $] -\rho, \rho[$.
3. (1pt) Montrer soigneusement que pour tout $x \in] -1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

• • • FIN DE L'ÉPREUVE • • •
